

**РАЗНОВИДНОСТИ «СВЕРХРАЗРЕШАЮЩИХ» АНАЛИЗАТОРОВ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ
НА ОСНОВЕ ОБЕЛЯЮЩИХ АДАПТИВНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ**

**VARIETY OF "SUPERRESOLUTION" ANALYSERS OF SPATIAL-
TEMPORAL RANDOM SIGNALS' SPECTRUM BASED ON WHITENING
ADAPTIVE LATTICE FILTERS**

Д. И. Леховицкий, Д. В. Атаманский, И. Г. Кириллов

D. I. Lekhovitsky, D. V. Atamansky, I. G. Kirillov

Рассматриваются особенности использования адаптивных решетчатых фильтров (АРФ) для реализации «сверхразрешающих» методов оценивания пространственно-временного спектра случайных сигналов. Показывается, что наряду с точными эквивалентами ряда известных методов на основе АРФ возможна простая реализация их новых разновидностей с существенно улучшенными статистическими характеристиками.

ABSTRACT. The paper examines features of the adaptive lattice filters (ALF) used for implementation of "superresolution" methods for estimation of spatial-temporal random signals' spectrum. It is shown that, along with the exact equivalents of a number of the known methods based on the use of ALF, there is a possibility to simple implementing of their new types based on the use of ALF with the essentially improved statistical performance.

1. Введение

Спектральные функции (СФ) многих цифровых «сверхразрешающих» методов оценивания энергетических спектров гауссовских пространственно-временных случайных сигналов являются скалярными функциями $M \times M$ матрицы $\varnothing = \Phi^{-1}$, обратной $M \times M$ корреляционной матрице Φ случайного M -мерного вектора отсчетов комплексных амплитуд анализируемого процесса. В связи с этим для реализации этих методов требуются цифровые фильтры с матричной импульсной характеристикой (МИХ), пропорциональной матрице \varnothing .*)

В типичных для практики условиях параметрической априорной неопределенности для решения этой задачи должны использоваться адаптивные фильтры, МИХ которых

*) Напомним, что под МИХ M -входного фильтра с N выходами понимается, как обычно, $N \times M$ матрица – отклик на входное воздействие в виде единичной $M \times M$ матрицы \mathbf{I}_M [1].

пропорциональна формируемой по обучающей выборке оценочной матрице $\hat{\Phi}$, используемой взамен априори неизвестной истинной матрицы Φ .

Из множества известных адаптивных фильтров, которые могут иметь требуемую **МИХ**, практически наиболее интересны адаптивные решетчатые фильтры (**АРФ**), первые варианты которых были предложены **Дж. П. Бергом** еще в 1968 г. [2] для спектрального анализа стационарных временных рядов методом максимальной энтропии (**МЭ**) [3]. В силу важных практических достоинств **АРФ** в последующие годы в литературе было уделено большое внимание развитию их теории, расширению функциональных возможностей и областей применения (см., например, [4-16] и др.), в том числе и для решения задач пространственно-временного спектрального анализа (**ПВ СА**) [16-21 и др.]. Тем не менее некоторые дополнительные возможности повышения эффективности адаптивного **ПВ СА** в реальных условиях обучающих выборок конечного объема, связанные с учетом и использованием специфики **АРФ**, прошли мимо внимания исследователей.

Данная статья посвящена обоснованию и анализу этих возможностей. Она организована следующим образом. В п.2 приводятся краткие сведения об **АРФ**, достаточные для последующего изложения. В п.3 рассматривается «решетчатая» реализация некоторых известных «сверхразрешающих» методов **ПВ СА**, анализировавшихся в [22]. В п.4 предлагаются их новые разновидности, синтезированные с учетом специфики **АРФ** и результатов анализа [22]. В п.5 сравниваются статистические характеристики известных и предложенных методов **ПВ СА**, показываются важные практические преимущества последних.

Статья может рассматриваться как непосредственное продолжение [22]. В ней используются те же термины и обозначения, которые в связи с этим для экономии места подробно не раскрываются. Ссылки на пункты, формулы и рисунки из [22] снабжаются звездочкой, например, п.4*, (15*), рис.3* и т. д.

2. Краткие сведения об адаптивных решетчатых фильтрах

А. Решетчатые фильтры (**РФ**) относятся к достаточно широкому классу фильтров, которые строятся по выбранному факторизованному (мультипликативному) представлению требующейся **МИХ**, то есть по ее представлению в виде произведения слабозаполненных матриц-сомножителей. Такое представление приводит к многоступенчатым фильтрам, число ступеней которых определяется количеством, а их структура – видом матриц-сомножителей. На их основе различные функции матрицы, пропорциональной **МИХ**, могут быть получены без явного формирования самой матрицы, достаточно определить только ненулевые элементы ее сомножителей (параметры ступеней фильтра).

Б. Базовая структура «универсального решетчатого фильтра [9-15]» с M входами и $2M$ выходами строится по факторизованному представлению $2M \times M$ **МИХ**

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{D}_M \mathbf{B}_M \mathbf{D}_{M-1} \mathbf{B}_{M-1} \dots \mathbf{D}_3 \mathbf{B}_3 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{V} \mathbf{D}_1 = [\mathbf{H}^*, \mathbf{N}]^* \quad (1)$$

с $M \times M$ блоками $\mathbf{H} = \{h_{il}\}_{i,l=1}^M$ и $\mathbf{N}^* = \{n_{li}^*\}_{i,l=1}^M$, представляющими собой **нижнюю** и **верхнюю** $M \times M$ **треугольные** ($h_{il} = n_{li} = 0$ при $l > i$) матрицы.

Здесь $\mathbf{D}_1 = \text{diag}\{s_1(l)\}_{l=1}^M$ - диагональная $M \times M$ матрица с элементами $s_1(l)$, $l \in 1, M$ на главной диагонали, $\mathbf{V} = \mathbf{I}_M \otimes [1, 1]^T$ - $2M \times M$ матрица «раздвоения», \otimes - символ кронекеровского перемножения [23], \mathbf{D}_m и \mathbf{B}_m ($m \in 2, M$) - $2M \times 2M$ блочно-диагональные матрицы вида

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_m &= \text{diag} \{ \mathbf{D}_m(l) \}_{l=1}^G \\ \mathfrak{E}_m &= \text{diag} \{ \mathfrak{E}_m(l) \}_{l=1}^G \end{aligned} \quad (2)$$

$G = M + 1 - m; m \in 2, M,$

с 2×2 матрицами-блоками

$$\mathbf{D}_m(l) = \begin{bmatrix} s_m(l) & 0 \\ 0 & c_m(l) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{E}_m(l) = \begin{bmatrix} \alpha_m(l) & 1 \\ 1 & \beta_m(l) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} l &\in 1, G; \\ m &\in 2, M. \end{aligned} \quad (3)$$

Соответствующий (1)-(3) $M = 4$ - входовой «пространственный» **РФ** показан на рис.1а [9-16].*) Он состоит из M ступеней, в m -й ($m \in 2, M$) из которых содержится $G = M + 1 - m$ однотипных двухвходовых фильтров с перекрестными связями – «элементарных решетчатых фильтров (ЭРФ)» – с 2×2 **МИХ** $\mathbf{D}_m(l)\mathfrak{E}_m(l)$ ($l \in 1, G$), обозначенных через $\mathfrak{E}_m(l)$ и раскрытых на рис.1б.

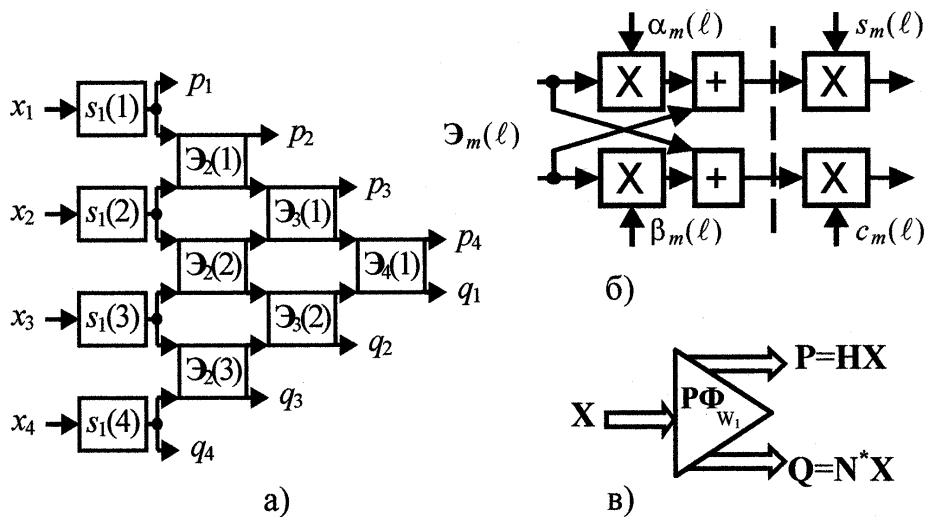


Рис.1

*) В данной статье, посвященной преимущественно пространственной обработке сигналов антенных решеток (АР), мы не затрагиваем «временные» разновидности АРФ [2-8, 13, 16-20], на которые все последующие результаты обобщаются достаточно очевидным образом.

Произвольный M -мерный вектор $\mathbf{X} = \{x_l\}_{l=1}^M$ преобразуется этим $\mathbf{P}\Phi$ в $2M$ -мерный вектор $\mathbf{W}_1 \mathbf{X} = [\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*]^*$ с M -мерными подвекторами

$$\mathbf{P} = \{p_l\}_{l=1}^M = \mathbf{H} \mathbf{X} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = \{q_l\}_{l=1}^M = \mathbf{N}^* \mathbf{X}, \quad (4)$$

показанными на условном обозначении $\mathbf{P}\Phi$ с $\mathbf{M}\mathbf{I}\mathbf{X}$ \mathbf{W}_1 ($\mathbf{P}\Phi_{\mathbf{W}_1}$) на рис.1в.

В. На рис.2а показан $\mathbf{P}\Phi$ с $M \times 2M$ $\mathbf{M}\mathbf{I}\mathbf{X}$

$$\mathbf{W}_2^* = \mathbf{D}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{B}'_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}'_3 \mathbf{D}_3 \dots \mathbf{B}'_{M-1} \mathbf{D}_{M-1} \mathbf{B}'_M \mathbf{D}_M = [\mathbf{\ddot{E}}^*, \mathbf{L}] \quad (5)$$

с $M \times M$ блоками $\mathbf{\ddot{E}}^*$ и \mathbf{L} , представляющими собой **верхнюю** ($\mathbf{\ddot{E}}^*$) и **нижнюю** (\mathbf{L}) **треугольные** $M \times M$ матрицы [11-16]. Здесь $2M \times 2M$ матрицы \mathbf{B}'_m ($m \in 2, M$) отличаются от матриц \mathbf{B}_m (2) заменой $2G \times 2G$ матрицы \mathcal{E}_m на матрицу $\mathcal{E}'_m = \text{diag} \{ \mathcal{E}'_m(l) \}_{l=1}$ с 2×2 блоками

$$\mathcal{E}'_m(l) = \mathbf{\Pi}_2 \mathcal{E}_m(l) \mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} \beta_m(l) & 1 \\ 1 & \alpha_m(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} l \in 1, G; G = M+1-l; \\ m \in 2, M. \end{matrix} \quad (6)$$

Как и $\mathbf{P}\Phi$ рис.1, он строится из ступеней однотипных $\mathcal{E}\mathbf{P}\Phi$ с 2×2 $\mathbf{M}\mathbf{I}\mathbf{X}$ $\mathcal{E}'_m(l) \mathbf{D}_m(l)$ (рис.2б), но следующих в «обратном» порядке (в силу «обратного» порядка следования сомножителей (5) по отношению к (1)).

Произвольный $2M$ -мерный вектор $\mathbf{C} = [\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*]^*$ преобразуется этим $\mathbf{P}\Phi$ в M -мерный вектор

$$\mathbf{R} = \{r_l\}_{l=1}^M = \mathbf{W}_2^* \mathbf{C} = \mathbf{\ddot{E}}^* \mathbf{P} + \mathbf{L} \mathbf{Q}, \quad (7)$$

показанный на условном обозначении $\mathbf{P}\Phi_{\mathbf{W}_2^*}$ на рис.2в.

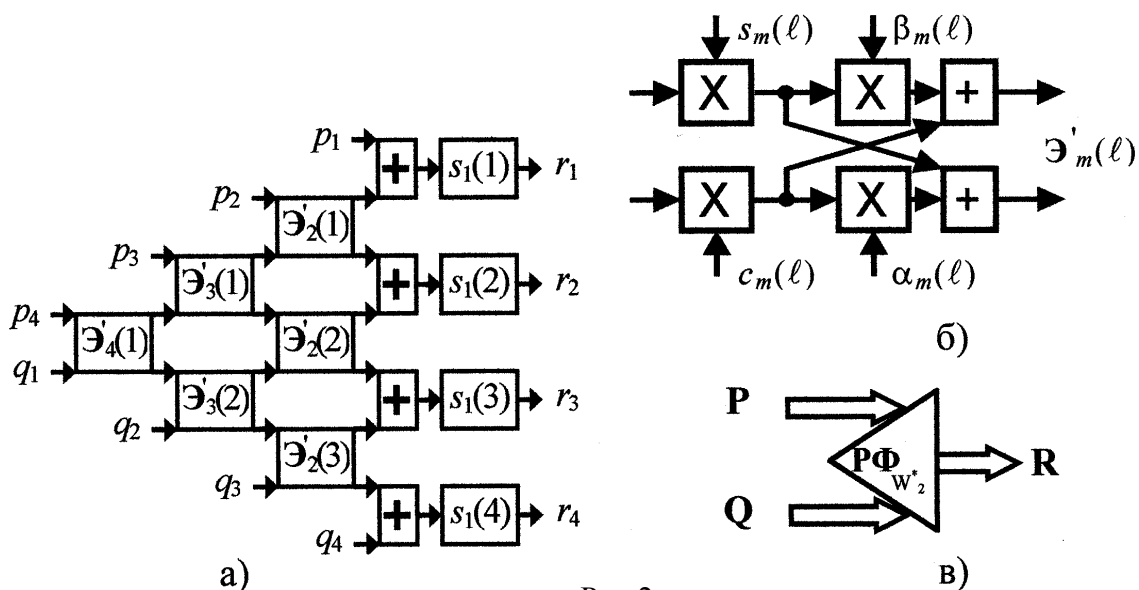


Рис.2

Г. Можно показать [11-13], что взаимосвязи (3), (6) сомножителей (1), (5) обеспечивают выполнение равенств

$$\ddot{\mathbf{E}}^* \mathbf{H} = \mathbf{\Phi} = \mathbf{L} \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{\Phi} = \{w_{il}\}_{i,l=1}^M, \quad (8)$$

в силу которых

$$\mathbf{W}_2^* \mathbf{W}_1 = \ddot{\mathbf{E}}^* \mathbf{H} + \mathbf{L} \mathbf{N}^* = 2\mathbf{\Phi}. \quad (9)$$

Поэтому фильтр с МИХ (9), пропорциональной $M \times M$ матрице $\mathbf{\Phi}$, можно получить при последовательном включении $\mathbf{P}\Phi$ рис.1,2 как показано на рис.3а [12-16]. Произвольный M -мерный вектор $\mathbf{X} = \{x_l\}_{l=1}^M$ преобразуется этим $\mathbf{P}\Phi$ в M -мерный вектор

$$\mathbf{W}_2^* \mathbf{W}_1 \mathbf{X} = \ddot{\mathbf{E}}^* \mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{L} \mathbf{N}^* \mathbf{X} = 2\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \{r_l\}_{l=1}^M = \mathbf{\Phi} \mathbf{X}, \quad (10)$$

равные слагаемые которого \mathbf{R} (10) можно получить на выходах $\mathbf{P}\Phi$ рис.3б или рис.3в, имеющих равные МИХ $\mathbf{\Phi}$ (8), образованные соответствующими слагаемыми в (9).

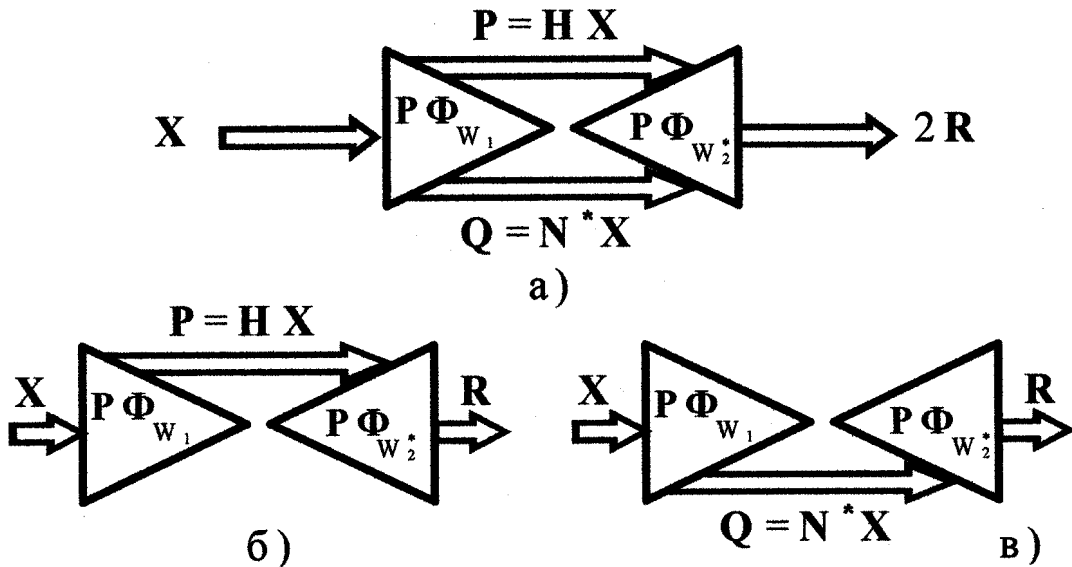


Рис.3

Д. Представления (1), (5), названные в [12, 13] «обобщенной факторизацией Левинсона (ОФЛ)» сомножителей «верхне-нижнего» и «нижне-верхнего» треугольных разложений (8) матрицы

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{-1}, \quad \mathbf{\Phi} = \{\varphi_{il}\}_{i,l=1}^M = \mathbf{H}^{-1} \ddot{\mathbf{E}}^{-*} = \mathbf{N}^{-*} \mathbf{L}^{-1}, \quad \mathbf{C}^{-*} = (\mathbf{C}^{-1})^* = (\mathbf{C}^*)^{-1}, \quad (11)$$

существуют для любых «строго несингулярных (с. н.)» матриц $\mathbf{\Phi}$, то есть матриц с ненулевыми главными минорами всех порядков [23, 24]

$$\det \Phi_m(l) = |\Phi_m(l)| \neq 0, \quad \Phi_m(l) = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^{m+l-1}, \quad m \in 1, M; \quad l \in 1, M+1-m. \quad (12)$$

Диагональные элементы матриц \mathbf{D}_m , $m \in 1, M$ (2), (3) в этом случае конечны, а матрицы $\mathbf{\Xi}_m(l)$ невырождены, так что

$$\alpha_m(l) \beta_m(l) \neq 1, \quad m \in 2, M; \quad l \in 1, M+1-m. \quad (13)$$

Для вырожденных матриц Φ ранга $r > 1$ последние неравенства выполняются при всех $m \in 2, r$ и нарушаются при $m = r + 1$:

$$\alpha_{r+1}(l)\beta_{r+1}(l)=1, \quad |\mathfrak{E}_{r+1}(l)|=0, \quad l \in 1, M-r. \quad (14)$$

Е. В общем случае произвольных **с. н.** матриц Φ **ОФЛ** (1)-(6) (как и ее «синонимы» **РФ** рис.1-3) полностью определяются M^2 комплексными параметрами - $s_1(l)$ ($l \in 1, M$), а также $\alpha_m(l)$ и $\beta_m(l)$, которые однозначно задают параметры $s_m(l) = c_m(l)$ ($m \in 2, M$; $l \in 1, M+1-m$) [12, 13].

В частном, но практически наиболее важном случае, когда $M \times M$ матрица

$$\Phi = \overline{Y_l Y_l^*}, \quad Y_l = \left\{ y_i^{(l)} \right\}_{i=1}^M, \quad l=1, 2, \dots \quad (15)$$

является корреляционной (и, следовательно, эрмитовой и положительно определенной (**п. о.**)) матрицей (**КМ**) случайных векторов Y_l (см. (4*), (5*)), число независимых параметров уменьшается. В силу указанных свойств **КМ** диагональные матрицы D_m ($m \in 1, M$) являются действительными, а диагональные элементы матриц $\mathfrak{E}_m(l)$ удовлетворяют условиям [5, 6, 14]

$$\beta_m(l) = \alpha_m^*(l), \quad \alpha_m(l)\beta_m(l) = |\alpha_m(l)|^2 < 1, \quad m \in 2, M; \quad l \in 1, M+1-m. \quad (16)$$

При этом, как следует из (1), (5),

$$W_1 = W_2 = W, \quad \mathfrak{E} = H, \quad L = N \quad (17)$$

и, в силу (8), (11),

$$H^* H = \emptyset = N N^*, \quad H^{-1} H^{-*} = \Phi = N^{-*} N^{-1}. \quad (18)$$

РФ рис.1 в этом случае представляет собой объединение двух **обеляющих** фильтров случайных векторов Y_l , поскольку преобразуют их в векторы $P_l = H Y_l$ и $Q_l = N^* Y_l$ с **КМ**

$$\overline{P_l P_l^*} = H \Phi H^* = \overline{Q_l Q_l^*} = N^* \Phi N = I_M, \quad (19)$$

т. е. в векторы со взаимно некоррелированными равномошными компонентами.

В свою очередь каждый из них представляет собой объединения «линейных фильтров предсказания с минимальной среднеквадратической ошибкой (**СКО**)» [5-7] всех порядков $p = m-1 \in 0, M-1$, **МИХ** которых совпадают с первыми m элементами m -й строки $e_m^* H$ нижней треугольной матрицы H и последними m элементами $(M+1-m)$ -й строки $e_{M+1-m}^* N^*$ верхней треугольной матрицы N^* .

РФ рис.3б,в являются при этом **обращающими**, поскольку преобразуют векторы Y_l в векторы $R_l = \emptyset Y_l$ с **КМ**

$$\overline{R_l R_l^*} = \emptyset \Phi \emptyset = \emptyset, \quad (20)$$

обратной **КМ** (15) векторов Y_l .

Ж. Важное достоинство **ОФЛ (РФ)** заключается в «наследовании» ее сомножителями (степенями **РФ**) специфики исходной **КМ**, связанной с симметрией ее элементов относительно побочной диагонали. В результате такого «наследования» закономерности расположения одинаковых элементов на m -й ($m \in 1, M$) диагонали матрицы Φ переносятся на расположение равных блоков $\mathcal{E}_m(l)$ и $\mathcal{D}_m(l)$ (3) в диагоналях матриц \mathbf{B}_M и \mathbf{D}_M (2) (на расположение одинаковых **ЭРФ** в m -й степени **РФ** рис.1).

Так, для **персимметричных** [24] (симметричных относительно побочной диагонали) **КМ**, возможных, в частности, в центрально-симметричных **АР** [13-15, 25-28, 33], дополнительно к (16) справедливы равенства

$$s_1(l) = s_1(M+1-l), \quad l \in 1, M; \quad \alpha_m(l) = \alpha_m(G+1-l), \quad m \in 2, M; \quad l \in 1, G; \quad G = M+1-m. \quad (21)$$

Для **теплицевых КМ** [2-20, 24, 28], например, **КМ** выходных сигналов **ЛЭАР** (п.2*), равенство всех элементов каждой диагонали матрицы Φ приводит к равенствам

$$\mathcal{D}_1 = s_1 \mathbf{I}_M, \quad \mathcal{D}_m = \mathbf{I}_G \otimes \mathcal{D}_m(1), \quad \mathcal{E}_m = \mathbf{I}_G \otimes \mathcal{E}_m(1), \quad m \in 2, M; \quad G = M+1-m, \quad (22)$$

то есть к равенству параметров всех **ЭРФ** каждой степени **РФ** рис.1:

$$s_1(l) = s_1(1) = s_1, \quad \alpha_m(l) = \alpha_m(1) = \alpha_m, \quad s_m(l) = c_m(l) = s_m(1) = s_m, \quad m \in 2, M. \quad (23)$$

При этом представления (1), (5) переходят в классическую факторизацию **Н. Левинсона** треугольных сомножителей матриц, обратных теплицевым [5-8, 24, 28], что объясняет их название для матриц общего вида (**ОФЛ**), данное в [12, 13].

Если, кроме того, теплицева **КМ** является **КМ** дискретного процесса **авторегрессии** [5, 7, 13-28] порядка $p < M$, то **ОФЛ (РФ)** «укорачивается»:

$$\alpha_m = 0, \quad s_m = c_m = 1, \quad \mathbf{D}_m = \mathbf{I}_{2M} \quad \text{для всех } m > p+1. \quad (24)$$

Треугольные сомножители **Н** и **Н** (18) матрицы Φ в этом случае являются **ленточными** [24] с шириной ленты $p+1$, а матрица Φ - **ленточной** с шириной ленты $2p+1$.

Отмеченное «наследование» (разновидности которого далеко не исчерпываются приведенными примерами) особенно важно для построения адаптивных **РФ (АРФ)**. Оно упрощает формирование оценок параметров («настройку») **АРФ**, учитывающих априорную информацию о специфике структуры (неизвестной) **КМ**, создавая за счет этого предпосылки для повышения эффективности адаптивной обработки в соответствующих условиях. Достижимый при этом выигрыш зависит от используемых критериев эффективности, размерности вектора

определяющих параметров **АРФ**, алгоритмов их оценивания и вида формируемых случайных функций (статистик) [2-7, 12-19, 33].*)

3. В данной статье этими статистиками являются случайные **СФ** (1*) (п.3) и их новые разновидности (п.4), формируемые M -входовыми **обеляющими** (рис.1) или **обращающими** (рис.3) **АРФ**, настроенными по N -мерной обучающей выборке

$$\mathbf{Y} = \{ \mathbf{Y}_l \}, \quad \mathbf{Y}_l = \{ y_i^{(l)} \}_{i=1}^M, \quad l \in 1, N \quad (25)$$

случайных векторов \mathbf{Y}_l со свойствами (5*).

Алгоритмы настройки **АРФ** в этой ситуации подробно рассмотрены, в частности, в [12, 15]. В них учет априорной информации о специфике **КМ** сводится к простому накоплению (усреднению) оценок априори равных параметров **РФ** (21), (23) и т. п., формируемых по «**базовому**» алгоритму настройки **АРФ** (**БАРФ**). Последний по выборке (25) настраивает **АРФ** рис.1 с результирующей $2M \times M$ **МИХ**

$$\hat{\mathbf{W}}_1 = [\hat{\mathbf{H}}^*, \hat{\mathbf{N}}]^*, \quad \hat{\mathbf{H}}^* \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{O}} = \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^*, \quad \hat{\mathbf{O}} = \hat{\mathbf{O}}^{-1} \quad (26)$$

для максимально правдоподобной (**МП**) оценки (6*)

$$\hat{\mathbf{O}} = \{ \hat{\phi}_{ij} \}_{i,j=1}^M = N^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^* = \sum_{l=1}^N \mathbf{Y}_l \mathbf{Y}_l^* \quad (27)$$

априори неизвестной **КМ** \mathbf{O} общего вида.

И. В **БАРФ** последовательно оцениваются параметры очередной (m -й) степени **АРФ** рис.1 по выборке, полученной преобразованием исходной (25) в его предыдущих ступенях. При этом переход к $(m+1)$ -й степени выполним только при справедливости для параметров m -й степени неравенств (16), нарушение которых «останавливает» **БАРФ**.

В связи с этим при выборке объема $N \geq M$, когда оценочная **КМ** (27) имеет полный ранг $r = M$ и, следовательно, **невырождена и положительно определена (п. о.)**, **БАРФ** выполним до конца (до $m = M$), а **МИХ** $\hat{\mathbf{W}}_1$ настроенного **АРФ** рис.1 удовлетворяет равенствам (26).

При $N < M$, когда матрица $\hat{\mathbf{O}}$ (27) вырождена и ее ранг $r = N < M$, **БАРФ** оценивает параметры первых $m \in 1, N$ ступеней **АРФ**, для которых неравенства (16) выполняются, но «останавливается» в $m = N+1$ -й степени, в которой эти неравенства нарушаются, преобразуясь в равенства (14).**) При этом параметры последующих ступеней **АРФ**, как и его **МИХ** в целом, оказываются неопределенными.

*) Этим **ОФЛ** (**АРФ**) выгодно отличаются от других «универсальных» методов факторизации (**Гаусса**, **Краута**, **Гивенса** и др. [23, 24]) и синтезированных на их основе многоступенчатых фильтров [23-32 и др.], в которых подобный учет специфики исходной матрицы \mathbf{O} существенно более сложен.

) При реальных вычислениях с конечной длиной разрядной сетки точное равенство (14) места не имеет и **БАРФ обычно может быть продолжен, однако параметры всех последующих ступеней **РФ** в этом случае являются ошибочными и не могут использоваться [15].

Указанная неопределенность является естественным итогом вырожденности оценочной **КМ** (27) при $N < M$, когда не определены ни матрица $\overset{\frown}{\Phi} = \overset{\frown}{\Phi}^{-1}$, ни треугольные сомножители $\overset{\frown}{\mathbf{H}}$ и $\overset{\frown}{\mathbf{N}}$ ее представлений (26).

К. Возможны различные способы их доопределения, основанные на использовании априорной информации о **п.о.** истинной (оцениваемой) **КМ**. Они сводятся к тому или иному «взвешиванию» элементов вырожденной (или плохо обусловленной [23, 24]) оценочной **КМ** (в частности, (27) при $N < M$), обеспечивающему **п.о.** взвешенной оценки или ее лучшую обусловленность.

Хорошо известен, например переход от точной **МП** оценки (27) к «регуляризованной» оценке [34-38]^{*)}

$$\overset{\frown}{\Phi}_P = N^{-1} \mathbf{A}_P, \quad \mathbf{A}_P = \mathbf{A} + \beta \mathbf{I}_M, \quad \beta > 0, \quad (28)$$

гарантированно **п.о.** при любых $N \geq 1$. **АРФ** с **МИХ**

$$\overset{\frown}{\mathbf{W}}_{1P} = [\overset{\frown}{\mathbf{H}}_P^*, \overset{\frown}{\mathbf{N}}_P]^*, \quad \overset{\frown}{\mathbf{H}}_P^* \overset{\frown}{\mathbf{H}}_P = \overset{\frown}{\mathbf{N}}_P \overset{\frown}{\mathbf{N}}_P^* = \overset{\frown}{\Phi}_P = \overset{\frown}{\Phi}_P^{-1}, \quad (29)$$

может быть настроен тем же **БАРФ**, но по «регуляризованной» выборке [15]

$$\mathbf{Y}_P = \{ \mathbf{Y}, \sqrt{\beta} \mathbf{I}_M \}. \quad (30)$$

Возможен, однако, и существенно более простой способ доопределения **МИХ АРФ** при $N < M$ [15]. Он заключается в настройке по **БАРФ** $m_0 \leq N$ ступеней **АРФ** и последующем «присвоении» параметрам остальных ступеней значений

$$\alpha_m(l) = 0, \quad s_m(l) = c_m(l) = 1, \quad m \in m_0 + 1, M; \quad l \in 1, M + 1 - m. \quad (31)$$

МИХ такого **АРФ** равна

$$\overset{\frown}{\mathbf{W}}_{1\Lambda} = [\overset{\frown}{\mathbf{H}}_\Lambda^*, \overset{\frown}{\mathbf{N}}_\Lambda]^*, \quad \overset{\frown}{\mathbf{H}}_\Lambda^* \overset{\frown}{\mathbf{H}}_\Lambda = \overset{\frown}{\mathbf{N}}_\Lambda \overset{\frown}{\mathbf{N}}_\Lambda^* = \overset{\frown}{\Phi}_\Lambda, \quad (32)$$

где $\overset{\frown}{\mathbf{H}}_\Lambda$ и $\overset{\frown}{\mathbf{N}}_\Lambda$ - нижние треугольные ленточные матрицы с шириной ленты m_0 - сомножители ленточной матрицы $\overset{\frown}{\Phi}_\Lambda$ с шириной ленты $2m_0 - 1$.

Поскольку при этом все $|\alpha_m(l)|^2 < 1$, матрица $\overset{\frown}{\Phi}_\Lambda$, а, следовательно, и матрица $\overset{\frown}{\Phi} = \overset{\frown}{\Phi}_\Lambda^{-1}$ гарантированно **п.о.**, причем это достигается «авторегрессионным» взвешиванием элементов исходной оценки (27) (п.2.Ж). По сравнению с (28) («диагональным взвешиванием» [38]) оно является более гибким, поскольку задается не единственным параметром β , выбор которого отнюдь не тривиален [34-37], а их набором – **МП** оценками параметров $m_0 \leq N$ ступеней **АРФ**, формируемых по **БАРФ** в процессе его настройки. По своей идейной сути этот метод близок к описанным в [38, п.4], но значительно более прост, поскольку сводится только к уменьшению

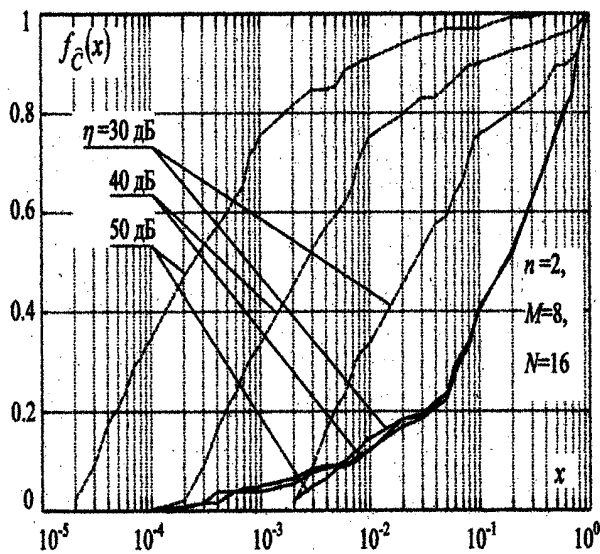
^{*)} Дополнительные ссылки приведены в [38].

“числа шагов” в БАРФ. В ряде случаев полезным может оказаться его использование в сочетании с “регуляризованной” обучающей выборкой (30) [15].

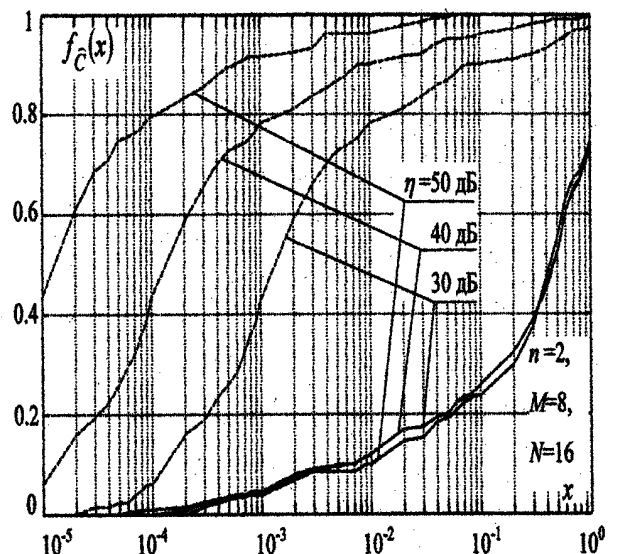
Л. В условиях точечных источников независимых шумовых излучений их (априори неизвестное) число n определяет «эффективный» ранг [35-37] КМ Ф (9*) выходных сигналов АР. Чем выше относительная интенсивность излучений, тем хуже обусловлены как КМ Ф (9*), так и МП оценка (27), в том числе и при $N > M$. По мере ухудшения ее обусловленности в $m = n + 1$ -й ступени АРФ приближаются к единице произведения (14), (16) оценок определяющих параметров ЭРФ этой ступени или, что эквивалентно, приближаются к нулю детерминанты 2×2 матриц $\mathcal{E}_m(l)$ (3). Поэтому в качестве возможной оценки числа источников n можно использовать значение $\hat{n} = m_0 - 1$, определяемое номером m_0 той ступени АРФ, в которой в процессе настройки окажется минимальным модуль среднего значения этих детерминантов

$$\hat{c} = \hat{c}(m) = G^{-1} \sum_{l=1}^G |\mathcal{E}_m(l)| = G^{-1} \sum_{l=1}^G |1 - \alpha_m(l) \cdot \beta_m(l)|, \quad G = M + 1 - m. \quad (33)$$

На рис.4а показаны семейства эмпирических функций распределения $f_c(x)$ случайных величин $\hat{c} = \hat{c}(2)$ (сплошные кривые) и $\hat{c} = \hat{c}(3)$ (штриховые кривые) при $M = 8$ и $n = 2$. В каждом из 200 экспериментов, на основе которых построены эти кривые, формировались независимые обучающие выборки объема $N = 16$ для случайных угловых координат и относительных (по отношению к собственному шуму) интенсивностей каждого из источников, но фиксированной их суммарной интенсивности η в канале приема, ориентированном в направлении нормали АР. При каждом значении $x = x_0$ ординаты штриховых кривых характеризуют вероятность правильной, а сплошных – ошибочной (заниженной) оценки числа источников (вероятность завышенной оценки меньше и поэтому не показана).



а)



б)

Рис.4

Видно, что при относительно высокой интенсивности излучений ($\eta \geq 40$ дБ) возможен выбор такого уровня порога x_0 (в данном примере $x_0 \approx 10^{-2}$), при котором вероятность ошибки заметно ниже вероятности правильной оценки.

Надежность оценки числа источников излучений меньшей интенсивности можно улучшить при использовании критерия (33) в процессе настройки $M/2$ -входного АРФ с МИХ $\hat{\Phi}_{12} = \hat{\Phi}_{12}^{-1}$, обратной $M/2 \times M/2$ неэрмитовой подматрице $\hat{\Phi}_{12} = \{\hat{\phi}_{ij}\}$, $i \in 1, M/2$, $j \in M/2+1, M$ матрицы $\hat{\Phi}$ (27).*) Эмпирические функции распределения $f_c(x)$ для этого случая показаны на рис.4б. Хорошо видно, что здесь вероятность ошибочной оценки несколько ниже, а правильной – существенно выше, чем в условиях рис.4а.

Физической причиной этого является взаимная некоррелированность собственных шумов элементов (модулей) АР, вследствие которой число источников $n < M/2$ определяет не «эффективный», а истинный ранг $M/2 \times M/2$ подматрицы $\hat{\Phi}_{12}$ матрицы $\hat{\Phi}$ (9*) – взаимно корреляционной матрицы выходных сигналов двух неперекрывающихся «половин» АР. Это означает не приближенное, а точное выполнение условий (14), при которых критерий (33) с вероятностью единица правильно определяет число источников n . Однако в оценочной матрице $\hat{\Phi}_{12}$ при конечном объеме выборки N шумовая составляющая не является нулевой, в связи с чем эта вероятность не является единичной и тем сильнее отличается от нее, чем меньше интенсивность внешних излучений (чем больше относительный вклад «необнуленной» шумовой составляющей в оценке $\hat{\Phi}_{12}$).*)

Перейдем теперь к «решетчатым» анализаторам, формирующим СФ $\hat{S}(\alpha)$ методов (1*) на основе тем или иным способом настроенных АРФ.

3. «Сверхразрешающие» анализаторы на основе АРФ

Значения СФ $\hat{S}(\alpha)$ методов (1*) в произвольной точке анализа $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ очевидным образом могут быть сформированы путем соответствующего комбинирования квадратов модулей элементов векторов

$$\mathbf{P} = \{p_m\}_{m=1}^M = \hat{\mathbf{N}} \mathbf{X}, \quad \mathbf{Q} = \{q_m\}_{m=1}^M = \hat{\mathbf{N}}^* \mathbf{X}, \quad \mathbf{R} = \{r_m\}_{m=1}^M = \hat{\Phi} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha) \quad (34)$$

*) Соответствующее обобщение БААРФ [15] на случай неэрмитовых матриц готовится авторами к публикации.

*) Нетрудно усмотреть аналогию этого метода с известным, основанным на определении ранга модифицированной оценочной $M \times M$ матрицы $\hat{\Phi}_{\text{мод}} = \hat{\Phi} - \hat{\sigma}_{ш}^2 \mathbf{I}_M$, где $\hat{\sigma}_{ш}^2$ – оценка мощности собственных шумов элементов (модулей) АР. Эти методы, однако, могут оказаться существенно более сложными, чем рассмотренный. Их сравнение представляет интерес для специального исследования.

на выходах настроенных **АРФ** рис.1-3, полученных в результате преобразования в них M -мерного вектора «поиска» $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha)$ (п.2*).

Так, **СФ** $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_1(\alpha)$ метода «минимальной дисперсии (**МД**)» **Кейпона** как следует из (26), (34), допускает представления

$$\hat{S}_1(\alpha) = (\mathbf{P}^* \mathbf{P})^{-1} = \left(\mathbf{P}_{-M}^* \mathbf{P}_{-M} + |p_M|^2 \right)^{-1} = (\mathbf{Q}^* \mathbf{Q})^{-1} = \left(\mathbf{Q}_{-1}^* \mathbf{Q}_{-1} + |q_1|^2 \right)^{-1}, \quad (35a)$$

где

$$\mathbf{P}_{-M} = \{ p_m \}_{m=1}^{M-1}, \quad \mathbf{Q}_{-1} = \{ q_m \}_{m=2}^M - \quad (35b)$$

$(M-1)$ - мерные векторы, составленные из $(M-1)$ первых элементов вектора \mathbf{P} (без последнего) и $(M-1)$ последних элементов вектора \mathbf{Q} (без первого) соответственно.

В этих обозначениях **СФ** $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_{MЭ}(M, \alpha)$ и $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_{MЭ}(1, \alpha)$ «метода максимальной энтропии (**МЭ**)» **Берга** (п.7*), представляющие собой варианты **СФ** $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_2(\alpha) = \omega_{mm} |e_m^* \mathbf{X}(\alpha)|^{-2}$ метода «линейного предсказания (**ЛП**)» (1*) при $m = M$ и $m = 1$, равны

$$\hat{S}_{MЭ}(M, \alpha) = |p_M|^{-2} = (\mathbf{P}^* \mathbf{P} - \mathbf{P}_{-M}^* \mathbf{P}_{-M})^{-1}, \quad \hat{S}_{MЭ}(1, \alpha) = |q_1|^{-2} = (\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{-1}^* \mathbf{Q}_{-1})^{-1}. \quad (36)$$

При выводе (36) учтено, что, в силу (26),

$$\omega_{MM} = h_{MM}^2, \quad \omega_{11} = h_{11}^2, \quad \mathbf{e}_M^* \mathbf{H}^* = h_{MM} \mathbf{e}_M^*, \quad \mathbf{e}_1^* \mathbf{N} = h_{11} \mathbf{e}_1^*.$$

В связи с этим возможны и два варианта **СФ** $\hat{S}(\alpha) = \hat{C}_3(\alpha)$ и $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_3(\alpha)$ «модифицированного алгоритма **Кейпона** (**МАК**)» (1*), (71*):

$$\begin{aligned} \hat{C}_3(M, \alpha) &= \frac{\mathbf{P}_{-M}^* \mathbf{P}_{-M}}{|p_M|^2}, \quad \hat{C}_3(1, \alpha) = \frac{\mathbf{Q}_{-1}^* \mathbf{Q}_{-1}}{|q_1|^2} \\ \hat{S}_3(M, \alpha) &= \frac{\mathbf{P}^* \mathbf{P}}{|p_M|^2} = \hat{C}_3(M, \alpha) + 1, \quad \hat{S}_3(1, \alpha) = \frac{\mathbf{Q}^* \mathbf{Q}}{|q_1|^2} = \hat{C}_3(1, \alpha) + 1 \end{aligned} \quad (37)$$

На рис.5 приведена схема формирования **СФ** (35)-(37) на основе общего **АРФ** с **МИХ** \hat{W}_1 (26). Специфика такого **АРФ**, объединяющего два адаптивных **обеляющих** фильтра (п.2.Е), позволяет одновременно сформировать два комплекта каждой из этих **СФ**. Эта естественная «избыточность» может быть эффективно использована как для контроля правильности вычислений (путем сравнения априори равных значений обеих **СФ** $\hat{S}_1(\alpha)$) [11], так и для повышения качества спектрального анализа (за счет перехода к средним значениям в общем случае различающихся других «одноименных» **СФ**) [39, 40].

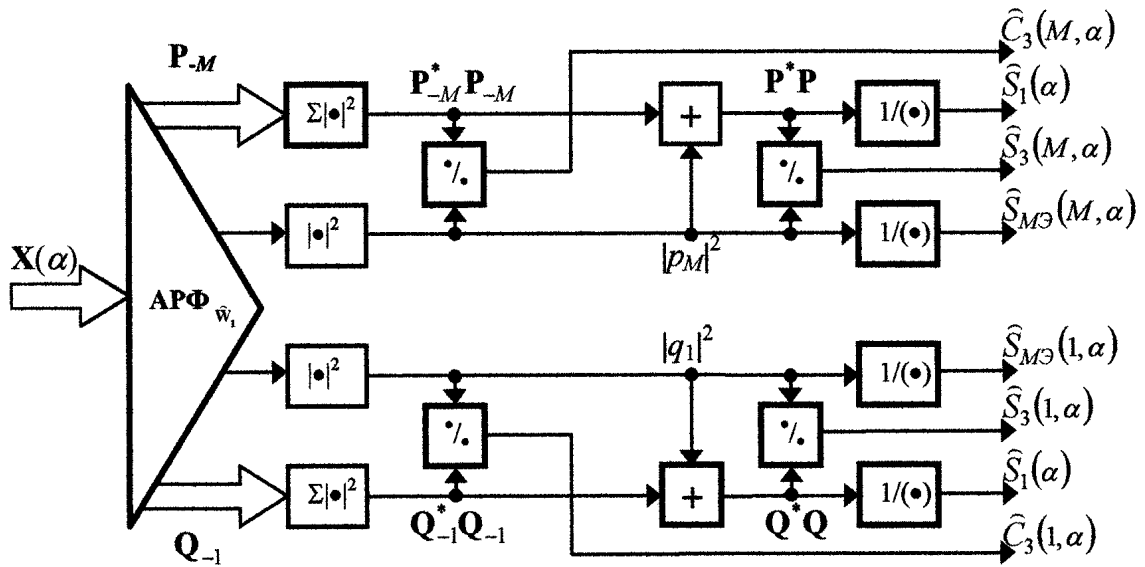


Рис.5

СФ $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_4(\alpha)$ метода Борджотти-Лагунаса (БЛ) и $\hat{S}(\alpha) = \hat{S}_5(\alpha)$ метода «теплового шума (ТШ)» (1*) в соответствии с (34), (35) допускают представления

$$\hat{S}_4(\alpha) = P^*P/R^*R = Q^*Q/R^*R, \quad \hat{S}_5(\alpha) = 1/R^*R \quad (38)$$

и, следовательно, пропорциональные им СФ могут быть сформированы адаптивным **обращающим** АРФ рис.3а с МИХ $\hat{W}_1\hat{W}_1^* = 2\emptyset$ по схеме рис.6. Очевидным образом для этой цели могут быть использованы и АРФ рис.3б,в, но в этом случае будет формироваться только одна из СФ $\hat{S}_4(\alpha)$ схемы рис.6.

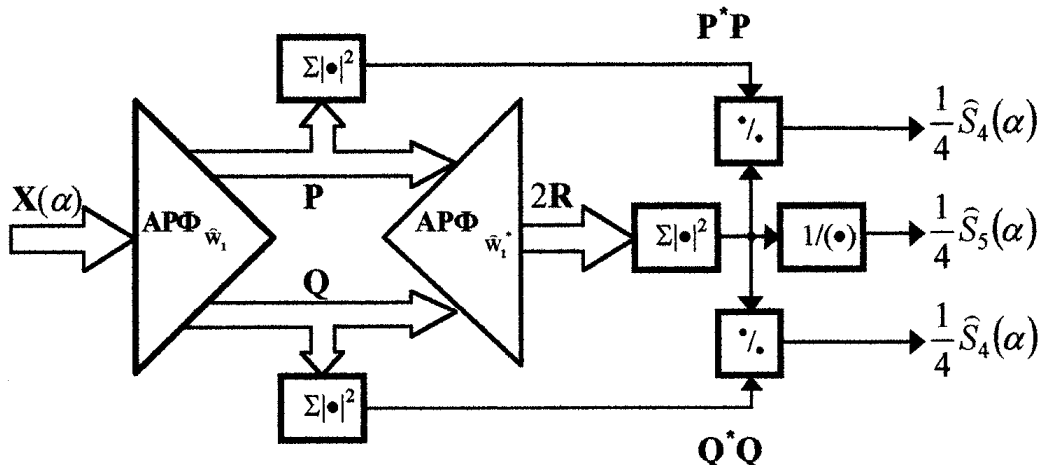


Рис.6

На «решетчатые эквиваленты» (35)-(38) методов (1*) при настройке АРФ в схемах рис.5,6 по БААРФ (п.2.3) и обучающей выборке Y (25) «эффективного» объема $\delta = N - M \geq 0$ (п.2*) полностью переносятся результаты сравнительного статистического анализа [22]. Выявленные в п.7* причины различной «робастности» этих методов при малых объемах выборки $\delta \geq 0$, а также схемы рис.5, 6 «подсказывают» простые разновидности СФ с улучшенными статистическими характеристиками в этих условиях.

4. Разновидности «сверхразрешающих» анализаторов на основе АРФ

Обратим внимание на формальные отличия способов формирования **СФ** $\dot{S}_{MЭ}(M, \alpha)$ (36) метода **МЭ** и **СФ** $\dot{S}_1(\alpha)$ (35) метода **МД**, хорошо видные на рис.5, наглядно иллюстрирующем известную связь между ними (п.7*):

$$\dot{S}_1^{-1}(\alpha) = \sum_{m=1}^M |p_m|^2 = \sum_{m=1}^M \dot{S}_{MЭ}^{-1}(m, \alpha), \quad \dot{S}_{MЭ}^{-1}(m, \alpha) = |p_m|^2, \quad m \in 1, M. \quad (39)$$

В **СФ** $\dot{S}_{MЭ}(M, \alpha)$ «задействован» квадрат модуля **единственного** (последнего) элемента выходного вектора $\mathbf{P} = \{p_m\}_{m=1}^M$, тогда как в **СФ** $\dot{S}_1(\alpha)$ - квадраты модулей **всех** элементов этого вектора, каждый из которых обратен значению **СФ** $\dot{S}_{MЭ}(m, \alpha)$ метода **МЭ** m -го ($m \in 1, M$) порядка. Эти **СФ** представляют собой обращенные диаграммы направленности (**ДН**) (при временной обработке – частотные характеристики) пространственного фильтра линейного предсказания с минимальной **СКО** порядка $m-1$ (п.2.Е) в m -элементной **АР** с уменьшенной (в случае **ЛЭАР** – в M/m раз) апертурой, и поэтому представляют собой тем более «гладкие» функции α , чем меньше значение m (в частности, **СФ** $|p_1|^{-2}$ от α вообще не зависит). Именно этим **полным** накоплением **СФ** $\dot{S}_{MЭ}(m, \alpha)$ **всех** порядков $m \in 1, M$ объясняется как асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) **минимальная** по сравнению с другими методами (1*) разрешающая способность по критерию **Рэля** метода **МД** (п.6.Б*), так и его **максимальная** «робастность» в условиях выборок малого объема $\delta = N - M \geq 0$ (п.5.Б*, 6.В*, 7*). И наоборот, именно **полным отсутствием** накопления **СФ** $\dot{S}_{MЭ}(m, \alpha)$ порядков $m < M$ порождается как существенно **более высокое** разрешение по критерию **Рэля** метода **МЭ** при больших $N \rightarrow \infty$, так и его **минимальная** «робастность» в условиях малых $\delta \geq 0$ (п.5.Г*, 6.Г*, 7*).

Отсюда следует, что в этих условиях можно ожидать повышения эффективности анализа за счет перехода к «**промежуточным**» **СФ** $\dot{S}_{ПР}(M, \alpha)$ или $\dot{S}_{ПР}(1, \alpha)$ вида

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ПР}(M, \alpha) &= (\mathbf{P}_{ПР}^* \mathbf{P}_{ПР})^{-1} = (\mathbf{P}^* \mathbf{P} - \mathbf{P}_{\chi M}^* \mathbf{P}_{\chi M})^{-1}, \quad \mathbf{P}_{\chi M} = \{p_m\}_{m=1}^{\chi M}, \quad \mathbf{P}_{ПР} = \{p_m\}_{m=1+\chi M}^M, \\ \dot{S}_{ПР}(1, \alpha) &= (\mathbf{Q}_{ПР}^* \mathbf{Q}_{ПР})^{-1} = (\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\chi M}^* \mathbf{Q}_{\chi M})^{-1}, \quad \mathbf{Q}_{ПР} = \{q_m\}_{m=1}^{n_{ПР}}, \quad \mathbf{Q}_{\chi M} = \{q_m\}_{m=1+n_{ПР}}^M, \end{aligned} \quad (40)$$

которые формируются «**промежуточным**» числом

$$n_{ПР} = (1 - \chi)M, \quad \chi \in 0, (M-1)/M \quad (41)$$

последних элементов вектора \mathbf{P} и первых элементов вектора \mathbf{Q} , или, что эквивалентно, из формирования которых **исключены** χM первых элементов вектора \mathbf{P} и последних элементов вектора \mathbf{Q} . В «предельных» случаях $\chi = 0$ и $\chi = (M-1)/M$ ($n_{ПР} = M$ и $n_{ПР} = 1$) введенные **СФ** (40) совпадают с **СФ** (35), (36):

$$\hat{S}_{PP}(M, \alpha) = \hat{S}_{PP}(1, \alpha) = \hat{S}_1(\alpha), \quad \chi = 0, \quad n_{II} = M; \quad (42)$$

$$\hat{S}_{PP}(M, \alpha) = \hat{S}_{MЭ}(M, \alpha), \quad \hat{S}_{PP}(1, \alpha) = \hat{S}_{MЭ}(1, \alpha), \quad \chi = (M-1)/M, \quad n_{II} = 1;$$

«Промежуточные» разновидности **СФ МАК** (37), для обозначения которых вместо знака (^) мы используем (~), принимают вид:

$$\tilde{C}_3(M, \alpha) = \mathbf{P}_{\chi M}^* \mathbf{P}_{\chi M} / \mathbf{P}_{PP}^* \mathbf{P}_{PP}, \quad \tilde{C}_3(1, \alpha) = \mathbf{Q}_{\chi M}^* \mathbf{Q}_{\chi M} / \mathbf{Q}_{PP}^* \mathbf{Q}_{PP}, \quad (43)$$

$$\tilde{S}_3(M, \alpha) = \mathbf{P}^* \mathbf{P} / \mathbf{P}_{PP}^* \mathbf{P}_{PP} = \tilde{C}_3(M, \alpha) + 1, \quad \tilde{S}_3(1, \alpha) = \mathbf{Q}^* \mathbf{Q} / \mathbf{Q}_{PP}^* \mathbf{Q}_{PP} = \tilde{C}_3(1, \alpha) + 1.$$

Формирование **СФ** (40), (43) на основе настроенного **АРФ** \hat{w}_i показано на схеме рис.7. Здесь же показано формирование «комбинированных» **СФ**

$$\hat{S}_{CP}(\alpha) = \frac{2}{\mathbf{P}_{PP}^* \mathbf{P}_{PP} + \mathbf{Q}_{PP}^* \mathbf{Q}_{PP}}, \quad \hat{S}_K(\alpha) = \hat{S}_{CP}(\alpha) \cdot \mathbf{P}^* \mathbf{P}, \quad \hat{C}_K(\alpha) = \frac{\mathbf{P}_{\chi M}^* \mathbf{P}_{\chi M} + \mathbf{Q}_{\chi M}^* \mathbf{Q}_{\chi M}}{\mathbf{P}_{PP}^* \mathbf{P}_{PP} + \mathbf{Q}_{PP}^* \mathbf{Q}_{PP}}, \quad (44)$$

полученных за счет естественной избыточности **АРФ** (п.3).

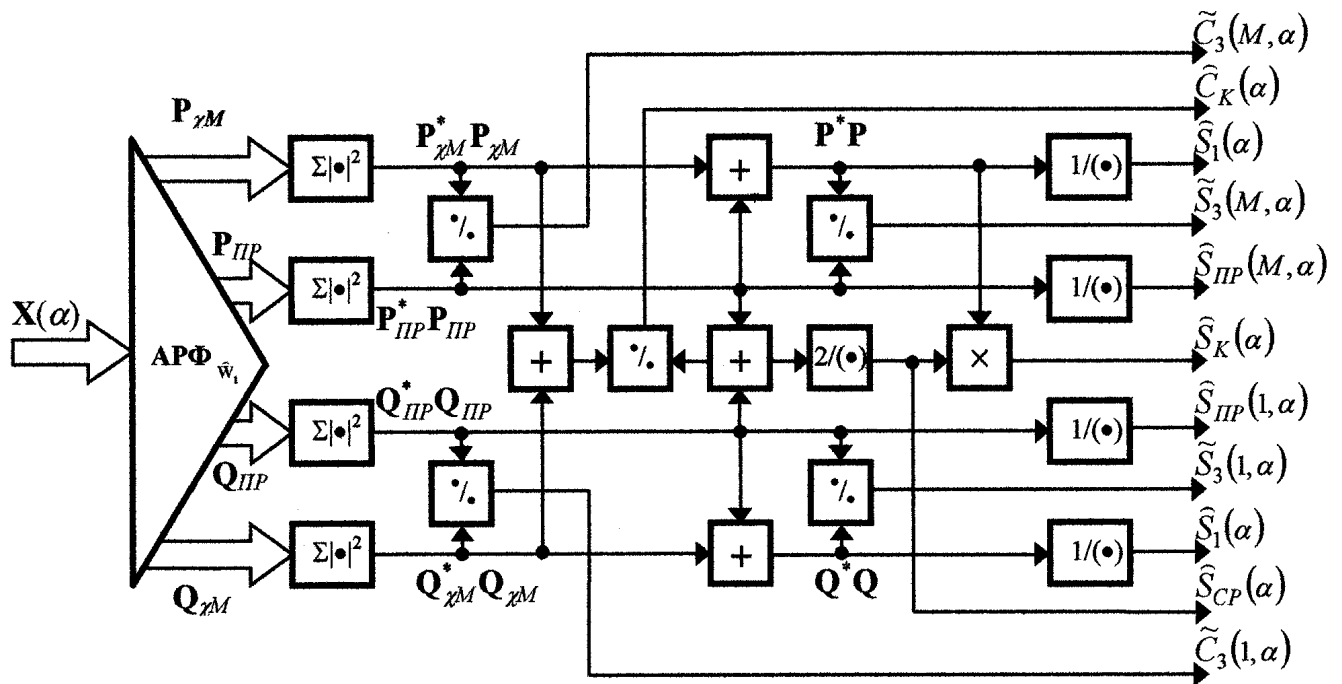


Рис.7

Переход от **СФ** (35) к «промежуточным» **СФ** (40) путем исключения χM первых (последних) элементов вектора **P** (**Q**) сопровождается двумя «противоборствующими» эффектами. С одной стороны, такое исключение увеличивает асимптотическую (при $N \rightarrow \infty$) разрешающую способность по критерию **Рэля** (п.6.А*) методов (40) по сравнению с методом **МД** (35), приближая ее к разрешающей способности метода **МЭ** (36) тем сильнее, чем ближе значение χ к верхнему пределу $\chi = (M-1)/M$. С другой стороны, оно уменьшает «робастность» методов (40) по сравнению с (35) в условиях выборок малого эффективного объема $\delta = N - M \geq 0$, когда «разрушается» эффект «слипания», являющейся источником этой асимптотически ($N \rightarrow \infty$)

высокой разрешающей способности методов МЭ (п.7*). Поэтому целесообразность использования СФ (40), как и связанных с ней СФ (43), (44), определяется тем, какой из этих факторов проявляется «сильнее». Ниже приводится теоретико-экспериментальное сравнение действия этих факторов.

5. Сравнительный анализ статистических характеристик «предельных» и «промежуточных» СФ

А. Начнем с анализа динамики изменения параметра «глубины провала» (п.6.А*)

$$\gamma(\chi) = S(\beta_i) / S(\beta_{CP}), \quad i=1, 2; \quad \beta_{CP} = (\beta_1 + \beta_2) / 2 \quad (45)$$

в процессе изменения значения χ (41) в истинных ($\emptyset = \emptyset$) «промежуточных» СФ (40), (43)

$$S(\alpha) = S_{ПП}(M, \alpha), \quad S(\alpha) = C_3(M, \alpha), \quad S(\alpha) = S_3(M, \alpha) \quad (46)$$

в традиционной тестовой ситуации $n = 2$ точечных источников независимых равномошных ($h_1 = h_2 = h$ (9*)) излучений с направлений β_i ($i = 1, 2$).

В соответствии с (34), (18), для этих СФ справедливы представления

$$\begin{aligned} S_{ПП}(M, \alpha) &= 1 / \delta_\eta, \quad C_3(M, \alpha) = \eta_\chi / \delta_\eta, \quad S_3(M, \alpha) = \eta_M / \delta_\eta = C_3(M, \alpha) + 1, \\ \eta_M &= S_1^{-1}(\alpha) = \mathbf{X}^*(\alpha) \emptyset \mathbf{X}(\alpha), \quad \eta_\chi = \mathbf{X}_\chi^* \emptyset_\chi \mathbf{X}_\chi, \quad \delta_\eta = \eta_M - \eta_\chi, \\ \mathbf{X}_\chi &= \mathbf{X}_\chi(\alpha) = \{x_m(\alpha)\}_{m=1}^{\chi M}, \quad \emptyset_\chi = \Phi_\chi^{-1}, \quad \Phi_\chi = \{\phi_{il}\}_{i,l=1}^{\chi M}, \end{aligned} \quad (47)$$

в силу которых параметр $\gamma(\chi) = \gamma_\emptyset(\chi)$ СФ $S_{ПП}(M, \alpha)$ (40) равен

$$\gamma_\emptyset(\chi) = \frac{\gamma_{MD} - S_1(\beta_i) \eta_\chi(\beta_{CP})}{1 - S_1(\beta_i) \eta_\chi(\beta_i)}, \quad (48)$$

а параметры $\gamma(\chi) = \gamma_C(\chi)$ и $\gamma(\chi) = \gamma_S(\chi)$ СФ $C_3(M, \alpha)$ и $S_3(M, \alpha)$ (43) связаны с ним равенствами

$$\gamma_C(\chi) = \gamma_\emptyset(\chi) \eta_\chi(\beta_i) / \eta_\chi(\beta_{CP}), \quad \gamma_S(\chi) = \gamma_\emptyset(\chi) / \gamma_{MD}, \quad \gamma_{MD} = S_1(\beta_i) / S_1(\beta_{CP}), \quad (49)$$

где γ_{MD} - параметр (45) СФ $S_1(\alpha)$ метода МД Кейпона.

Определяющая (48), (49) квадратичная форма η_χ (48) зависит от геометрии расположения и характеристик элементов (модулей) АР, задающих как вид вектора поиска $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha)$, так и векторов-столбцов $M \times 2$ матрицы \mathbf{G} в КМ (9*). Ограничиваясь для конкретности случаем M -элементной ЛЭАР со столбцами (2*), (10*) (п.2*) и используя (11*), для этой квадратичной формы получим

$$\gamma_\chi(\alpha) = \mathbf{X}_\chi^*(\alpha) \left(\mathbf{I}_{\chi M} - h \mathbf{G}_\chi \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{G}_\chi^* \right) \mathbf{X}_\chi(\alpha), \quad (50)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{I}_2 + h \mathbf{\Gamma}_2, \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{G}_\chi^* \mathbf{G}_\chi, \quad \mathbf{G}_\chi = \{ \mathbf{X}_\chi(\beta_i) \}_{i=1}^2.$$

В рассматриваемых условиях ЛЭАР 2×2 матрица Грамма [23] Γ_2 равна

$$\Gamma_2 = \chi M \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_\chi \\ \rho_\chi & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_\chi = \text{sinc}(\chi\Delta) = \frac{\sin \pi\chi\Delta}{\pi\chi\Delta}, \quad (51)$$

в связи с чем для матрицы \mathbf{T}_2 допустимо представление

$$\mathbf{T}_2 = (1 + q\chi(1 - \rho_\chi)) (\mathbf{I}_2 + \mu \mathbf{E} \mathbf{E}^*), \quad \mu = \frac{q\chi \rho_\chi}{1 + q\chi(1 - \rho_\chi)}, \quad \mathbf{E}^* = [1, 1],$$

в силу которого

$$\mathbf{T}_2^{-1} = (1 + q\chi(1 - \rho_\chi))^{-1} (\mathbf{I}_2 - \mu / (1 + 2\mu) \cdot \mathbf{E} \mathbf{E}^*).$$

Поэтому квадратичная форма (50) равна

$$\eta_\chi(\alpha) = \chi M - \frac{\mu}{q\chi \rho_\chi} h \left(\mathbf{V}^*(\alpha) \mathbf{V}(\alpha) - \mu / (1 + 2\mu) \mathbf{V}^*(\alpha) \mathbf{E} \mathbf{E}^* \mathbf{V}^*(\alpha) \right),$$

где через $\mathbf{V}^*(\alpha)$ обозначена двумерная строка

$$\mathbf{V}^*(\alpha) = \mathbf{X}_\chi^*(\alpha) \mathbf{G}_\chi = \left\{ \frac{\sin \chi \frac{M}{2} (\alpha - \beta_i)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta_i)} \right\}_{i=1}^2 = \begin{cases} \chi M [1, \rho_\chi], & \alpha = \beta_1, \\ \rho_\chi / \cos \frac{\pi\chi\Delta}{2} \cdot \mathbf{E}^*, & \alpha = \beta_{CP}, \\ \chi M [\rho_\chi, 1], & \alpha = \beta_2. \end{cases}$$

Используя последние равенства, нетрудно убедиться, что

$$\eta_\chi(\beta_i) = \chi M \left(1 - \frac{\mu}{(1 + 2\mu) \rho_\chi} (1 + \rho_\chi^2 + \mu (1 - \rho_\chi)^2) \right), \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

$$\eta_\chi(\beta_{CP}) = \chi M \left(1 - \frac{4\mu \rho_\chi}{(1 + 2\mu)(1 + \cos \pi\chi\Delta) \rho_\chi} \right), \quad \mu = \frac{q\chi \rho_\chi}{1 + q\chi(1 - \rho_\chi)}, \quad \rho_\chi = \text{sinc}(\chi\Delta),$$

а значения $\eta_M(\alpha) = S_1^{-1}(\alpha)$ в точках $\alpha = \beta_i$ ($i = 1, 2$) и $\alpha = \beta_{CP}$ получаются из (52) при $\chi = 1$.

Формулы (52), в сочетании с (48), (49) решающие поставленную задачу, показывают, что при заданных **ООСШ** $q = Mh$ (23*) и относительном угловом расстоянии Δ (25*) между источниками искомые параметры (45) **СФ** (46) зависят не от размерности M выходных векторов **P** и **Q** (34) **АРФ** $_{w_1}$ непосредственно, а только от относительной доли $\chi = 1 - n_{II} / M$ (41) их элементов, «исключенных» из формирования «промежуточных» **СФ** (40). В условиях ЛЭАР это в равной мере относится и к **СФ** $S_{II}(1, \alpha)$ (40), $C_3(1, \alpha)$, $S_3(1, \alpha)$ (43), параметры (45) которых такие же, как и у соответствующих **СФ** (46).

Б. На рис.8 для выбранных в качестве примера условий $\Delta = 0.5$ и $q = 95.5$ (≈ 20 дБ) показаны рассчитанные по (52), (49), (48) зависимости $v(\chi) = \gamma(\chi) / \gamma(0)$ (45) для **СФ** (40), (43). Они количественно иллюстрируют первый (**позитивный**) эффект «исключения» – рост асимптотической ($N \rightarrow \infty$) «глубины провала» в этих **СФ** по сравнению со значением $\gamma(0) = \gamma_{MD}$

(в этих условиях равным 2 дБ (рис.6*)) по мере роста χ - числа элементов выходных векторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} (34), «не участвующих» в формировании $\mathbf{C}\Phi$ (40).

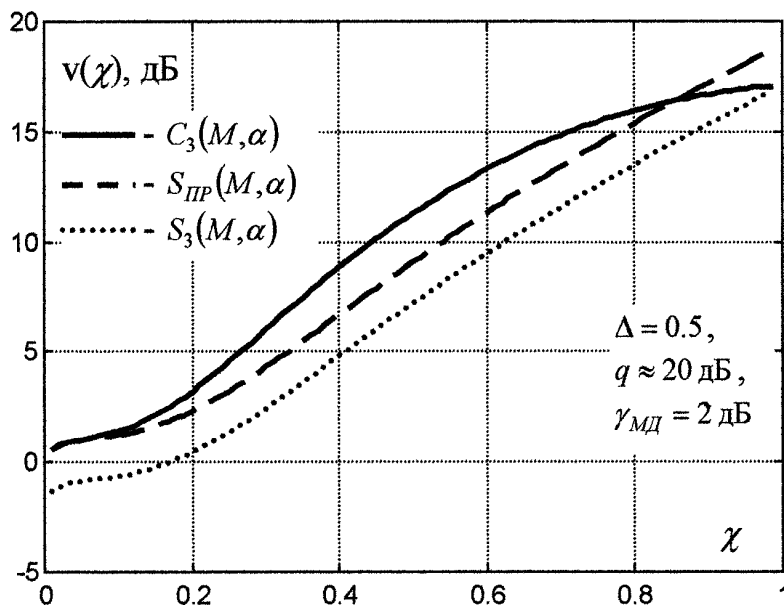


Рис.8

На рис.9 для этих же условий и $M = 16$, $\delta = 0$ (а) и $\delta = 10$ (б) приведены семейства эмпирических функций распределения $f_{\hat{v}}(x)$ нормированного случайного параметра $\hat{v} = \hat{v}' / \gamma$ (58*) для $\mathbf{C}\Phi$ (40) и $\mathbf{C}\Phi \tilde{C}_3(M, \alpha)$ (43) при различных значениях $\chi \in 0, (M-1)/M \approx 0.94$. Они иллюстрируют второй (**негативный**) эффект – «смещение влево» этих функций распределения по мере роста χ при конечных значениях $\delta \geq 0$ (п.5*, 6*). Количественной мерой этого эффекта может служить степень уменьшения **медианы** $x_0 = x_0(\chi)$ ($f_{\hat{v}}(x_0) = 1/2$), определяющей пороговый уровень $\gamma_0(x) = x_0 \gamma(\chi)$, который случайным параметром $\hat{v}' = \hat{v}'(\chi)$ (56*) соответствующей $\mathbf{C}\Phi$ будет превышен с вероятностью $P = 0.5$ (и выбор которого в процедуре разрешения по критерию **Рэля** (п.6.В*) обеспечит вероятность разрешения $P_r \in 0.5, 0.75$ (67*)).

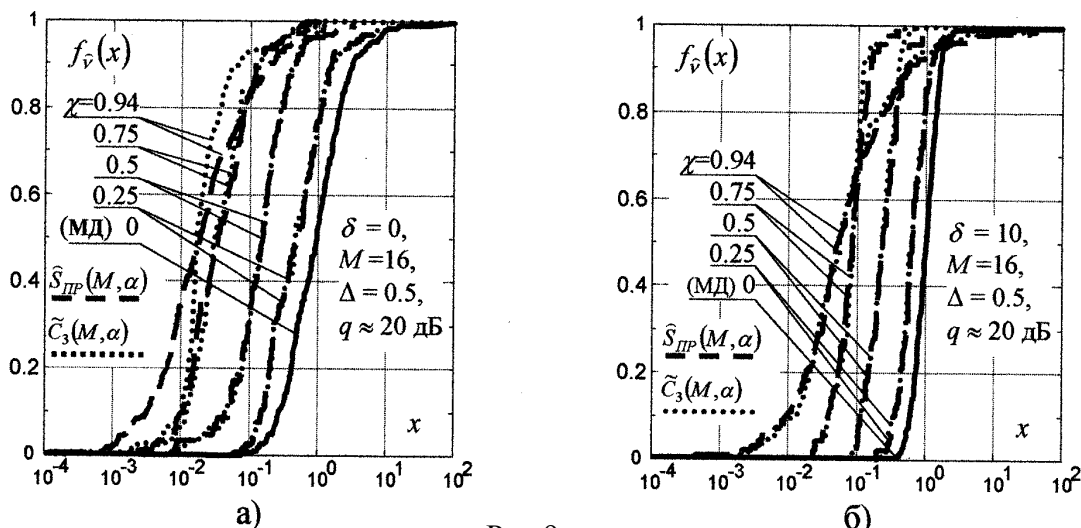


Рис.9

Совместное действие этих эффектов косвенно характеризует относительный уровень этого порога $g(\chi) = \gamma_0(\chi) / \gamma_0(0)$ - по отношению к пороговому уровню $\gamma_0(0) = \gamma_{MD}$ **СФ** $S_1(\alpha)$ метода **МД** - «предельной» **СФ** (40) при $\chi = 0$ (42). При $g(\chi) > 1$ результирующий эффект «исключения» позитивен, в противном случае - негативен.

Для рассматриваемого примера ($\Delta = 0.5$, $q = Mh \approx 20$ дБ, $M = 16$, **ЛЭАР**) значения $g(\chi)$ приведены в таблице.

χ		0	0.25	0.5	0.75	0.94
$\hat{S}_{IP}(\alpha)$	$\delta = 0$	1	1.15	1.28	0.95	1.36
	$\delta = 10$	1	1.3	1.8	2.19	3.1
$\tilde{C}_3(\alpha)$	$\delta = 0$	1	1.3	2.12	1.1	0.9
	$\delta = 10$	1	1.8	3.02	3.1	2.45

Видно, что предложенные «промежуточные» **СФ** (40), (43) обеспечивают более высокие значения $g(\chi)$, чем их известные «предельные» формы (42) с $\chi = 0$ или $\chi = (M - 1) / M \approx 0.94$, и, следовательно, более эффективны в условиях обучающих выборок малого объема δ .

Для условий рассматриваемого примера этот вывод наглядно иллюстрируют эмпирические зависимости вероятности разрешения $P_r(\delta)$ (п.6.В*, Г*) при пороге разрешения $\gamma_0 = \gamma_{MD}$, приведенные на рис.10. Здесь «промежуточные» **СФ** уже по выборкам малого объема $\delta = N - M \approx 0$ обеспечивают разрешение по критерию **Рэля** с такой вероятностью, которая на основе их «предельных» разновидностей достигается либо при выборках существенно большего объема $\delta \gg 1$ ($\chi = (M - 1) / M$), либо даже не достигается вообще ($\chi = 0$).

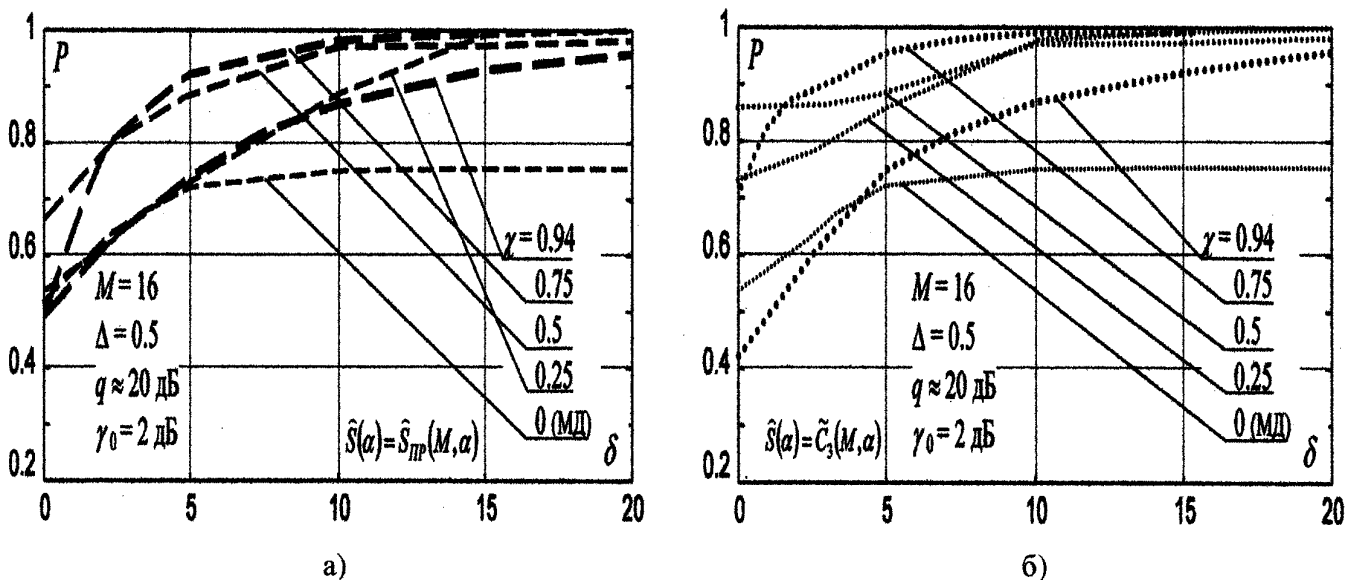


Рис.10

Сравнение кривых рис.10а,б показывает также, что «промежуточные» $\mathbf{CF} \tilde{C}_3(\alpha)$ (43) **МАК** эффективнее «промежуточных» $\mathbf{CF} \tilde{S}_{IP}(\alpha)$ (40) метода **МЭ** при малых значениях $\delta \geq 0$ и не уступают им при любых $\delta \gg 1$. Поскольку соответствующие им функции распределения $f_V(x)$ (рис.9) практически совпадают, разница между ними связана с различием их асимптотических свойств (рис.8). По этой причине, как показывают эксперименты, $\mathbf{CF} \tilde{C}_3(\alpha)$ эффективнее («робастнее») и $\mathbf{CF} \tilde{S}_3(\alpha)$ (43).

В. Спектральные функции $\hat{S}(\alpha)$ (1*) имеют «собственноструктурные» аналоги, получающиеся при замене матрицы $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^{-1}$ на матрицу

$$\hat{\Phi}_{Ш} = \hat{U}_{Ш} \hat{U}_{Ш}^*, \quad \hat{U}_{Ш} = \left\{ \hat{U}_{Ш i} \right\}_{i=1}^{M-n}, \quad \hat{\Phi}_{Ш}^2 = \hat{\Phi}_{Ш}, \quad (53)$$

в которой $\hat{U}_{Ш}$ - оценка $M \times (M-n)$ матрицы $U_{Ш} = \left\{ U_{Ш i} \right\}_{i=1}^{M-n}$, составленной из M -мерных ортонормированных собственных векторов $U_{Ш i}$ **КМ** Φ (15), (4*), соответствующих ее «шумовым» (в модели (9*) - единичным) собственным значениям λ_i ($i \in 1, M-n$) [8, 17, 19, 20, 28]. В частности, таким аналогом $\mathbf{CF} \hat{S}(\alpha) = \hat{S}_1(\alpha)$ метода **МД Кейпона** является $\mathbf{CF} \hat{S}(\alpha) = \hat{S}_{MUSIC}(\alpha) = \left(\mathbf{X}^*(\alpha) \hat{\Phi}_{Ш} \mathbf{X}(\alpha) \right)^{-1}$ метода **MUSIC**, а $\mathbf{CF} \hat{S}(\alpha) = \hat{S}_2(\alpha) = \hat{S}_2(m, \alpha)$ метода «линейного предсказания (ЛП)» - $\mathbf{CF} \hat{S}(\alpha) = \hat{S}_{MN}(m, \alpha) = \left| \mathbf{e}_m^* \hat{\Phi}_{Ш} \mathbf{X}(\alpha) \right|^{-2}$ «обобщенного» ($m \in 1, M$) метода «минимальной нормы (MN)» [45, 46]. Эти \mathbf{CF} связаны равенством [45]

$$\hat{S}_{MUSIC}^{-1}(\alpha) = \sum_{m=1}^M \hat{S}_{MN}^{-1}(m, \alpha), \quad (54)$$

по виду записи в точности совпадающим с равенством (39) для их «несобственноструктурных» (непрерывных) аналогов (совпадая «по форме», эти равенства отличаются «содержанием» слагаемых: в(54) ими являются **ДН** фильтров **ЛП** одного и того же порядка M , отличающихся номером $m \in 1, M$ предсказываемого элемента, тогда как в (39) - **ДН** фильтров предсказания последовательно возрастающего порядка m последнего (m -го, $m \in 1, M$) элемента).

Проведенный выше анализ позволяет предположить, что в реальных условиях выборок малого объема полезным может оказаться использование подобных (40) «промежуточных» разновидностей \mathbf{CF} (54) с различным числом слагаемых $m \in 1, \chi M$, а также их модификаций типа (43). Такое пополнение «банка» [46] собственноструктурных методов пеленгации точечных источников шумовых излучений в сочетании с рациональной стратегией использования результатов каждого из них, например, с «псевдослучайной стратегией точечного оценивания (**PR-JES**) [45, 46]», может обеспечить дальнейшее повышение ее эффективности.

Г. Методы **ПВ СА** (40), (43), (44) с частичным или полным набором параметров $\chi \in 0, (M-1)/M$, реализуемые на основе единого **АРФ** (рис.7), в типичных случаях $M \gg 1$ образуют достаточно емкий «банк», который может рассматриваться и как дополнение, и как альтернатива «банку» собственноструктурных методов. Очевидное достоинство предложенного «банка» - существенно большая простота настройки **АРФ** и формирования множества **СФ** на его основе, чем решение задач предварительной оценки числа источников и полной проблемы собственных значений [23, 24] для оценочной **КМ**. В связи с этим несомненный интерес представляет сравнительное исследование эффективности (разрешающей способности, точности, требований к **ООСШ**, объему выборки, разрядности вычислений, идентичности характеристик каналов приема и т.д.) рациональных стратегий использования этих «банков».

В то же время очевидно, что для широкого класса практически важных задач **ПВ СА** процессов (полей) с непрерывными или дискретно-непрерывными спектрами мощности, для которых модель **КМ** (9*) малого «эффективного» ранга неприменима, **АРФ – банк** (рис.7) методов (40), (43), (44), не использующих понятий «сигнального» и «шумового» подпространств этой **КМ**, лежащих в основе «собственноструктурных» методов [8, 17, 19, 20, 28], является практически более приемлемым.

Д. На рис.11 в качестве иллюстрации приведены результаты воспроизведения по $M = 64$ - точечной тестовой последовательности ($N = 1$) модельного дискретно-непрерывного спектра (а) стационарного (с теплицевой **КМ**) случайного процесса **С.М. Кея** и **С.Л. Марпла** [17, 19].

Рис.11б-д,л показывают **СФ** известных методов – классических вариантов методов **МД Кейпона** (б) и **МЭ Берга** (в) (заимствованы из [17, 19]), методов [42] (г) и [43] (д), а также «собственноструктурного» метода **Писаренко** [17, 19] (л).

Остальные **СФ** сформированы **АРФ** (рис.6, 7), настроенным по «теплицевому» варианту **БАРФ** [12, 15], реализующему оценки **Берга** [3, 5-7] параметров **АРФ**, но с использованием регуляризации (31), (32).

Рис.11е-к соответствуют **СФ** $\hat{S}_1(\alpha)$ (42) метода **МД** (е), **СФ** $\hat{S}_{IP}(\alpha)$ (40) (ж) и $\tilde{C}_3(\alpha)$ (43) (з) при $\chi \approx 0.5$, **СФ** $\hat{S}_5(\alpha)$ (38) метода **ТШ** (к).

Сравнение приведенных **СФ** показывает, что предложенные методы спектрального оценивания на основе **АРФ** позволяют воспроизвести дискретно-непрерывные спектры существенно лучше, чем «собственноструктурный» метод **Писаренко** (л) и классические методы **Кейпона** и **Берга**, и по крайней мере – не хуже, чем более сложные методы [42-44]. В равной степени это относится и к другим известным методам, тестируемым по модельному спектру рис.11а в [17, 19].

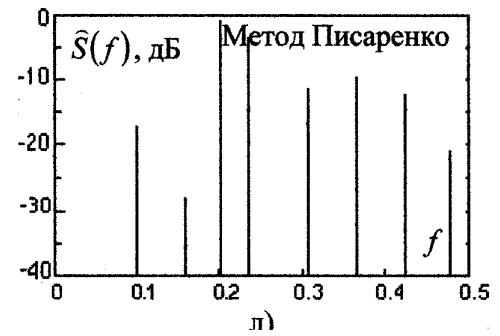
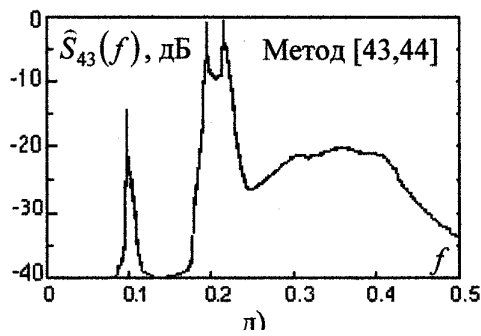
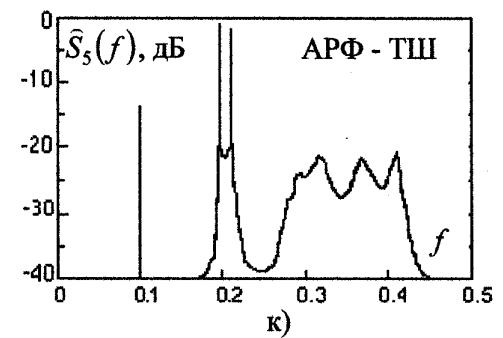
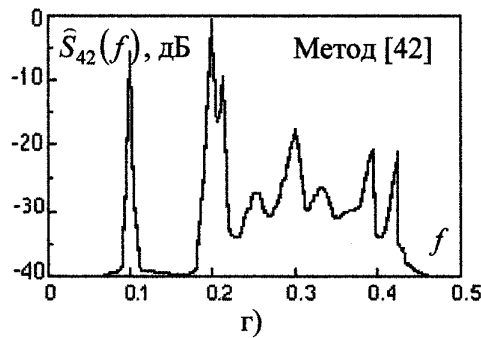
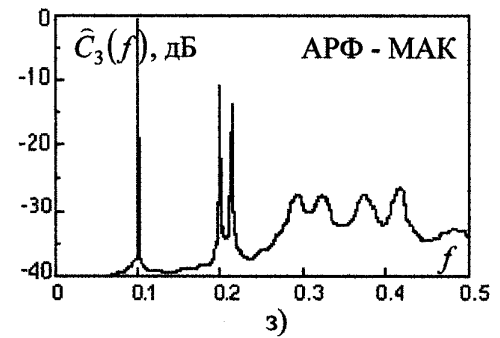
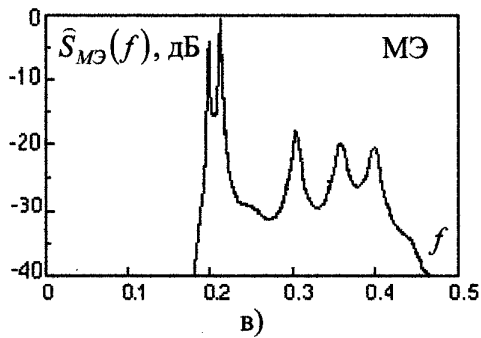
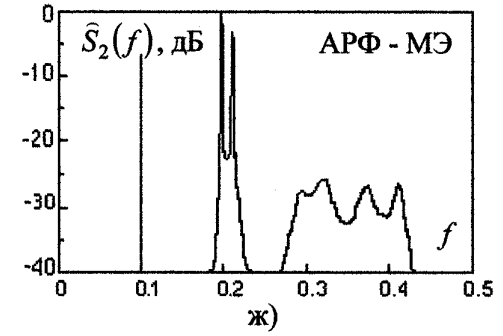
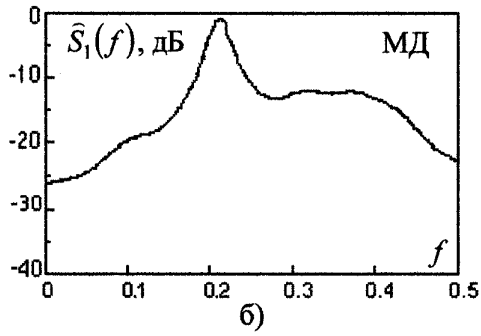
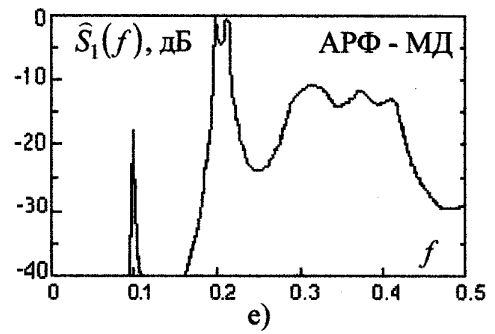
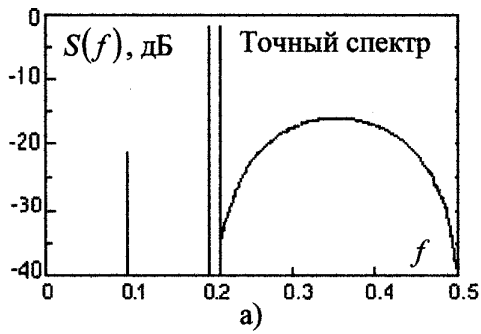


Рис.11

Заключение

Адаптивные решетчатые фильтры (АРФ) в силу целого ряда присущих им важных практических достоинств [3-20] являются мощным средством решения широкого круга задач пространственно-временной обработки, в частности, пространственно-временного спектрального анализа (ПВ СА) гауссовских случайных сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. Плодотворная идея [45, 46] отказа от поиска единственного «наилучшего» метода ПВ СА для всех возможных условий и ситуаций в пользу рациональной стратегии использования совокупности различных методов, может найти наиболее простое и эффективное воплощение именно на основе АРФ.

В статье показано, что на этой основе можно реализовать не только известные «сверхразрешающие» методы ПВ СА, но единообразно и весьма просто дополнить их целым рядом новых разновидностей с существенно улучшенными статистическими характеристиками в реальных условиях выборок конечного объема. Полученный весьма емкий АРФ – банк может быть дополнением или альтернативой «банку» собственноструктурных методов типа MUSIC [45, 46]. При этом простые методы, использованные при синтезе, существенно опирающиеся на учет специфики АРФ и теоретико-экспериментальные исследования [22], могут быть полезны и для расширения «банка» собственноструктурных методов.

Авторы признательны **П. М. Флексер** и **С. И. Бурковскому** за плодотворные дискуссии и помощь в оформлении работы.

Литература

1. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы. // Учебник. - М.: **Высшая школа**, 1983.- 536 с.
2. **Burg I.P.** A New Analysis Technique for Time Series Data. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, **August, 1968**.
3. **Burg I.P.** Maximum Entropy Spectral Analysis. Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists. Oklahoma City, Okla., **October 1967**.
4. Авторское свидетельство СССР № 953906, **1981**. **Леховицкий Д.И., Ширман Я.Д.**
5. **Фридландер Б.** Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных. // **ТИИЭР**. - **1982**. - т.70.- №8.- с.54-97.
6. **Giordano A., Hsu F.** Least Square Estimation with Applications to Digital Signal Processing, **JOHN WILEY & SONS, 1985**, 412 с.
7. Адаптивные фильтры. /Пер. с англ. /Под ред. **К.Коузэна и П.М.Гранта**. - М.: **Мир**, **1988**.- 392 с.
8. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов. /Пер. с англ. /Под ред. **С.Гуна, Х.Уайтхауса, Т.Кайлата**.- М.: **Радио и связь**, **1989**.- 472 с.
9. **Lev-Ari H., Kailath T.** Schur and Levinson algorithms for nonstationary processes. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust, Speech and Signal Process (**Atlanta, CA, March 1981**), p.860-864.
10. **Sharman K.C., Durrani T.S.** A triangular adaptive lattice filter for spatial signal processing.- ICASSP 83, Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process., Boston, Mass., 14-16 Apr., 1983, v.1 **New York, 1983**, p.348-351.
11. **Кузин С.С., Леховицкий Д.И.** Новая структура решетчатого фильтра и адаптивный алгоритм оценки его параметров. // **Радиотехника**. - М.: **1989**.- №6.- с.33.
12. **Леховицкий Д.И., Зарицкий В.И., Раков И.Д., Свердлов Б.Г., Ратынский М.В.** Методы адаптивной решетчатой фильтрации в задачах пространственно-временной обработки сигналов. // Препринт 8610. - М.: **РТИ АН СССР**, **1987**.- 30с.
13. **Леховицкий Д.И.** Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры. // **Радиофизика**. - **1992**.- т.35.- №9-10.- с.790-808.
14. **Леховицкий Д.И., Кириллов И.Г., Милованов С.Б.** Универсальные адаптивные решетчатые фильтры. Ч.1. Адаптация при заданной оценке корреляционной матрицы помех. // Деп. рук. в ВИНТИ рег. № 2127-В92 (аннотация - **Изв. вузов. Радиофизика**). - **1992**.- т.35.- №3-4.
15. **Леховицкий Д.И., Милованов С.Б., Раков И.Д., Свердлов Б.Г.** Универсальные адаптивные решетчатые фильтры. Ч.2. Адаптация при заданном корне из оценочной корреляционной матрицы. // **Изв. вузов. Радиофизика**. - **1992**.- №11-12.- с.969-992.

16. **Ширман Я.Д., Лосев Ю.И., Минервин Н.Н., Москвитин С.В., Леховицкий Д.И.** и др. Радиоэлектронные устройства: основы построения и теория. /Под ред. **Я.Д. Ширмана**. - М.: АО "Маквис", АО "Реам-Билдинг", 1997.
17. **Кей С.М., Марпл С.Л.** Современные методы спектрального анализа. Обзор. // **ТИИЭР**. - 1981. - т.69. - №11. - с.5-51.
18. **Фридландер Б.** Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры. // **ТИИЭР**. - 1982. - т.70. - №9. - с.95-125.
19. **Марпл - мл. С.Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. /Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - с.584.
20. **Кайлат Т.** Обработка сигналов в эпоху СБИС.- В. кн. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов" /Пер. с англ. /Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата.- М.: Радио и связь, 1989. - 472 с.
21. **Ширман Я.Д., Манжос В.Н., Леховицкий Д.И.** Некоторые этапы развития и проблемы теории и техники разрешения радиолокационных сигналов. // **Радиотехника**. - М.: 1997. - №1. - с.31-42.
22. **Леховицкий Д.И., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г., Флексер П.М.** Статистический анализ некоторых «сверхразрешающих» методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме обучающей выборки. // **Настоящий сборник**.
23. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. / Пер. с англ. под ред. В.Б.Лидского.- М.: Наука, 1976. - 351 с.
24. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. - М: Наука, 1984. - 320 с.
25. **Nitzberg R.** Application of Maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing. // **IEEE Trans. Aerosp. and Electr. Syst.** - 1980, v.AES-16, №1, p.124-127.
26. **Зарицкий В.И., Кокин В.Н., Леховицкий Д.И., Саламатин В.В.** Рекуррентные алгоритмы адаптивной обработки при центральной симметрии пространственно-временных каналов приема. // Изв. вузов. **Радиофизика**. - 1985. - №7. - с.863-871.
27. **Кошевой В.М., Радионов В.В.** Эффективность адаптивных фильтров с центральной симметрией приемных каналов. // **Радиотехника и электроника**. - 1994. - №11. - с.1779-1788.
28. **Stoica P. and Moses R.** Introduction to Spectral Analysis, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
29. **Лексаченко В.А., Шаталов А.А.** Синтез многомерного выбеливающего фильтра по методу Грама-Шмидта. // **Радиотехника и электроника**. - 1976. - т.21. - №1. - с.112.
30. **White W.D.** Cascade Processors for Adaptive Antennas. // **IEEE Trans. Antennas Propag.**, 1976, v.AP-24, №5, p.670-684.
31. **Ахмед Н., Йоун Д.Х.** О реализации единичного нижнего треугольного преобразования. // **ТИИЭР**. - 1979. - т.67. - №11. - с.106-107.
32. **Бондаренко Б.Ф., Прокофьев В.П.** Применение методов функционального анализа для решения задач синтеза системы пространственно-временной обработки сигналов. // Изв. вузов. **Радиоэлектроника**. - 1982. - т.25. - №7. - с.12-16.
33. **Леховицкий Д.И., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г., Зарицкий В.И.** Сравнение эффективности адаптивной обработки в произвольных и центрально-симметричных ФАР. // **Антенны**.- 2000.
34. **Абрамович Ю.И.** Регуляризованный метод адаптивной оптимизации фильтров по критерию максимума отношения сигнал/помеха. // **Радиотехника и электроника**. - 1981. - т.26. - №3. - с.543-551.
35. **Черемисин О.П.** Эффективность адаптивного алгоритма с регуляризацией выборочной корреляционной матрицы. // **Радиотехника и электроника**. - 1982. - т.27. - №10. - с.1933-1942.
36. **Черемисин О.П.** О выборе параметра для регуляризованного метода адаптивной оптимизации фильтров. // **Радиотехника и электроника**. - 1985. - т.30. - №12. - с.2363.
37. **Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С.** Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. - Л.: 1983. - 240 с.
38. **Гершман А.Б.** Робастные адаптивные антенные решетки. // **Настоящий сборник**.
39. **Леховицкий Д.И., Флексер П.М.** Статистический анализ разрешающей способности адаптивных алгоритмов спектрального оценивания. // Международная НТК "Современная радиолокация". Тезисы докладов. - Киев, 1994. - с.134.
40. **Lekhovitsky D.I., Atamansky D.V., Kirillov I.G., Flexer P.M.** Problems and new results of spectral estimation and antenna arrays superresolution techniques. - Proc. of the 3rd International Conferences Antenna theory and Techniques, 8-11 September 1999, Sevastopol, Ukraine, p.62-68.
41. **Леховицкий Д.И., Флексер П.М.** Статистический анализ разрешающей способности квазигармонического спектрального оценивания методом Кейпона. // Сборник докладов международной НТК "Современная радиолокация". Вып.1. - Киев, 1994. - с.66-71.
42. **Пыхалов А.А., Сарычев В.Т.** Спектральное оценивание стационарных процессов на основе обращения матрицы исходных данных. // **Радиоэлектроника**. - 1991. - т.34. - №1.
43. **Буняк Ю.А.** Спектральный анализ по методу инвариантного к динамике сигнала формирующего фильтра. // **Радиоэлектроника**. - 1996. - т.39. - №3. - с.53-61.
44. **Буняк Ю.А.** Двумерный спектральный анализ по методу максимального правдоподобия на основе линейной симметрии корреляционной матрицы. // **Радиоэлектроника**. - 1996. - т.39. - №4. - с.19-28.
45. **Гершман А.Б.** Комбинированная пеленгация с совместным использованием высокоразрешимых пеленгаторов различного типа. // **Радиотехника и электроника**. - 1995. - Вып.5. - с.918-924.
46. **Gershman A.B.** Pseudo-randomly generated estimator banks: a new tool for improving the threshold performance of direction finding, **IEEE Trans. Signal Process.** SP-46 (May 1998) p.1351-1364.